数理解析研究所講究録
582巻 1986年 119-124

Reflexivity and bicommutant property of contractions

札幌医大　高橋勝利（Katsutoshi Takahashi）

Hilbert 空間上の（有界線形）作用素 T に対して，T と I で生成される weakly closed algebra を Alg T で表わし，T の bicommutant，すなわち，T の commutant $\{T\}'$ の commutant，を $\{T\}''$ で表わす。また Lat T は T-不変（閉）部分空間の全体，そして $\text{Alg Lat } T = \{A : \text{Lat } T \subseteq \text{Lat } A\}$ とする。明らかに $\text{Alg } T \subseteq \text{Alg Lat } T$，$\text{Alg } T \subseteq \{T\}''$ が成り立つ。等式 $\text{Alg } T = \text{Alg Lat } T$ が成り立つとき T は reflexive であるといい，$\text{Alg } T = \{T\}''$ のとき T は bicommutant property をもつという。reflexive である作用素の最初の例は Sarason [4] によって与えられた，すなわち，彼は normal 作用素と analytic Toeplitz 作用素が reflexive であることを証明した。続いて Deddens [2] により isometry の reflexivity が示された，そして今いろいろのクラスの作用素に対して reflexivity が知られている。特に subnormal 作用素は

reflexiveである(Olin－Thomson)。一方，non-unitary isometryはbicommutant propertyをもつ[9]，そして normal作用素，quasinormal作用素の中でこの性質をもつ作用素が特徴づけられている(Wermer, Turner, Conway－Wu)。ここではSz.-NagyとFoias[5]の縮小作用素の理論の応用として得られるreflexivityとbicommutant propertyについての結果を与える。この方向での研究はすでに内山([10],[11])そしてWu([13],[14],[15],[16],[17])によって行なわれているが，我々の結果は彼らの結果を特別な場合として含む。

以下では，TをHilbert空間上の縮小作用素(i.e. $\|T\| \leqq 1$)，SをHardy空間H^2上のunilateral shift (i.e. $(Sf)(\lambda) = \lambda f(\lambda)$, $f \in H^2$)とする。

定理1．もし$XT = SX$なる作用素$X \neq 0$が存在するならば，Tはreflexiveであり([1])，bicommutant propertyをもつ([6])。

注意1．isometryのWold分解より，$XT = VX$なるnon-unitary isometry Vとdense rangeをもつ作用素Xが存在するならば，Tは定理1の仮定をみたす。

注意2．Tが絶対連続なunitary partをもつとき，定理1の証明は$\mathrm{Alg}\,T$がSz.-Nagy－FoiasのH^∞-functional calculusにより定まる作用素の全体$\{\varphi(T):\ \varphi\in H^\infty\}$と一致することを示す。

系1．$T=S\oplus T_1$ならば，Tはreflexiveであり([16])，bicommutant propertyをもつ。

[12]と[8]の結果から次の定理が得られる。

定理2．$I-T^*T$がtrace class作用素で$\sigma(T)=\{\lambda:|\lambda|\leqq 1\}$ならば，$XT=SX$または$XT^*=SX$なる作用素$X\neq 0$が存在する。

従って，

系2．$I-T^*T$がtrace classかつ$\sigma(T)=\{\lambda:|\lambda|\leqq 1\}$ならば，Tはreflexiveかつbicommutant propertyをもつ。

$I-T^*T$がfinite rankをもつ場合，系2はある付加的条件の下で内山([10]，[11])とWu([13]，[14]，[17])により証明された。$I-T^*T$がtrace class作用素でかつ$\sigma(T)\neq\{\lambda:|\lambda|\leqq 1\}$なる縮小作用素はweak contractionと呼ばれ詳しく研究されている。reflexivity，bicommutant propertyをもつweak contractionはその特性関数

$$\Theta_T(\lambda)=[-T+\lambda D_{T^*}(I-\lambda T^*)^{-1}D_T]|\overline{\operatorname{ran} D_T},\ (|\lambda|<1)$$

を使って特徴づけられる。ここで，$D_T=(I-T^*T)^{1/2}$，$D_{T^*}=(I-TT^*)^{1/2}$.

reflexivityについての系1は次のようにも一般化される。

定理3．[7] $T|\mathfrak{M}$ が unilateral shift となるような T-不変部分空間 $\mathfrak{M} \neq \{0\}$ が存在するならば，T は reflexive である。

注意．定理3の T は bicommutant property をもつとは限らない，例えば，T = bilateral shift は bicommutant property をもたない。

系3．T が bilateral shift summand をもつならば，T は reflexive である。

可分 Hilbert 空間上の縮小作用素 T に対して，T の特性関数 $\Theta_T(\lambda)$ は contraction-valued, H^∞-function であるから，ほとんど到る所で境界値 $\Theta_T(e^{it})$, $\|\Theta_T(e^{it})\| \leq 1$，が存在する。isometric part をもつ縮小作用素を特徴づける Sz.-Nagy と Foiaş の結果を使うと次の系を得る。

系4．T は可分 Hilbert 空間上の縮小作用素とする。次の条件(i)，(ii)，(iii) の一つが成り立つとき，T は reflexive である。

(i) $I - \Theta_T(e^{it})^* \Theta_T(e^{it}) = A(e^{it})^* A(e^{it})$ a.e. なる operator-valued H^∞-function $A \neq 0$ が存在する。

(ii) $\sup \|\Theta_T(e^{it})\| < 1$

(iii) $u\Theta_T^*$（ここで，$\Theta_T^*(e^{it}) = (\Theta_T(e^{it}))^*$）が operator-valued H^∞-function となるような scalar-valued H^∞-function $u \neq 0$ が存在する（特に，Θ_T が多項式である）。そして T の

completely non-unitary part は C_{00}- 縮小作用素でない，すなわち，$T = U \oplus T_1$，ここで U：unitary，T_1：unitary part をもたない縮小作用素，のとき $T_1^n \not\to 0$ または $T_1^{*n} \not\to 0$.

特性関数が定値関数である縮小作用素の reflexivity は [15] で証明された。

定理1と3を次のように一般化できるかどうかは分かっていない；$T|\mathfrak{M}$ が定理1の仮定をみたすような T-不変部分空間 $\mathfrak{M} \neq \{0\}$ が存在するならば，T は reflexive である。

注意．C_{11}-縮小作用素，すなわち，unitary 作用素に quasisimilar な縮小作用素は一般に reflexive かどうかは分かっていないが，そのような縮小作用素に対して上の命題は証明された [3]。

文　献

1. H. Bercovici and K. Takahashi, On the reflexivity of contractions on Hilbert space, J. London Math. Soc., to appear.
2. J. A. Deddens, Every isometry is reflexive, Proc. Amer. Math. Soc. 28(1971), 509-512.
3. L. Kerchy, On the residual parts of completely nonunitary contractions, preprint.
4. D. Sarason, Invariant subspaces and unstarred operator algebras, Pacific J. Math. 17(1966), 511-517.
5. B. Sz.-Nagy and C. Foias, Harmonic analysis of operators on Hilbert space, North-Holland, Amsterdam, 1970.

6. K. Takahashi, Contractions with the bicommutant property, Proc. Amer. Math. Soc. 93(1985), 91-95.
7. ____, On the reflexivity of contractions with isometric parts, preprint.
8. K. Takahashi and M. Uchiyama, Every C_{00} contraction with Hilbert-Schmidt defect operator is of class C_0, J. Operator Theory 10(1983), 331-335.
9. T. R. Turner, Double commutants of isometries, Tohoku Math. J. 24(1972), 547-549.
10. M. Uchiyama, Double commutants of $C_{.0}$ contractions, Proc. Amer. Math. Soc. 69(1978), 283-288.
11. ____, Double commutants of $C_{.0}$ contractions.II, Proc. Amer. Math. Soc. 74(1979), 271-277.
12. ____, Contractions and unilateral shifts, Acta Sci. Math. 46(1983), 345-356.
13. P. Y. Wu, Approximate decompositions of certain contractions, Acta Sci. Math. 44(1982), 137-149.
14. ____, On the reflexivity of $C_{1.}$ contractions and weak contractions, J. Operator Theory 8(1982), 209-217.
15. ____, Contractions with constant characteristic functions are reflexive, J. London Math. Soc. (2)29(1984), 533-544.
16. ____, Contractions with a unilateral shift summand are reflexive, Integral Equations and Operator Theory 7(1984), 899-904.
17. ____, Toward a characterization of reflexive contractions, J. Operator Theory 13(1985), 73-86.